

MECANIQUE ANALYTIQUE

Pour bien approcher la mécanique analytique il faut d'abord bien spécifier ce qu'il faut s'attendre.

On ne va pas introduire des phénomènes qui ne sont pas une conséquence des trois lois de Newton.

Pour ce qui concerne ce cours, les trois lois de Newton donnent une description complète et exacte de tous les phénomènes (systèmes) mécaniques.

L'intérêt de ce cours est dans la formulation mathématique de la mécanique. Il n'est écrit nulle part que la formulation Newtonienne soit la plus appropriée voir adaptée.

On va donc se poser la question si on peut reformuler la mécanique (les trois lois) d'une façon mathématiquement plus puissante, qui nous permet de mieux mettre en évidence les relations entre concepts et phénomènes.

Donc, dans la suite, on introduira les formalismes de Lagrange, de Hamilton et de Hamilton-Jacobi, en regardant ce que chaque un va nous révéler.

Encore une fois, ils ne vont pas nous dire de choses qui ne sont pas déjà contenues dans les lois de Newton. Tout simplement, ils vont mettre en évidence certaines relations, concepts et phénomènes.

On va commencer par quelques rappels.

Cinématique

La cinématique exprime les relations de base entre position, vitesse et accélération :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{x} = \dot{\vec{x}}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}}$$

Par intégration directe, donc, on a

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t') dt'$$

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}(0) + \int_0^t \vec{v}(t') dt' = \vec{x}(0) + \int_0^t \left[\vec{v}(0) + \int_0^{t'} \vec{a}(t'') dt'' \right] dt' = \\ &= \vec{x}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \vec{a}(t'') \end{aligned}$$

Une conséquence évidente est que, en absence d'une accélération, la vitesse est une constante (vectorielle : constante en intensité, direction et sens)

En principe, si on connaît les positions et vitesses initiales, et les accélérations à chaque instant, on peut donc intégrer les équations.

Le problème est quand même que les particules (objets) dont on cherche l'évolution temporelle, interagissent entre elle et donc les accélérations dépendent elles aussi des positions. Le problème est donc assez complexe.

Les trois lois de Newton

Dans son ouvrage les "Principia" (1687 ... en latin !), Newton a défini les lois mathématiques nécessaires pour décrire tous les systèmes mécaniques.

On peut voir ces lois comme les postulats nécessaires à définir un bâtiment mathématique complet et consistant. Comme on le sait de la physique générale, les lois sont trois :

1) Un corps sur lequel aucune force est appliquée, reste dans son état de mouvement rectiligne uniforme, c'est à dire à vitesse constante (vectorielle)

2) $\vec{F} = m \vec{a}$

3) Lois de action-réaction

La deuxième loi est bien évidemment phénoménologique : elle est déduite des observations.

Qu'est-ce qu'on peut dire de la première ?

En absence de force,

$$\underbrace{m \vec{a} = 0}_{\text{de la deuxième}} \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} \text{ constante par la définition même de l'accélération de la cinématique}$$

Donc, est la 1ère loi nécessaire ?

Disons que dans mon référentiel il n'y a pas de force sur un ballon : sa vitesse $\vec{v}$ reste constante.

Je dis à une amie à moi qu'il n'y a pas de force, mais elle mesure quand même une accélération (vitesse non constante). Donc elle a seulement deux possibilités (apparemment) :

1) Je suis un menteur, et en réalité il y a une force sur le ballon.

2) La première loi ne s'applique pas pour elle (et en conséquence la deuxième non plus!).

Attention: "pour elle" !!! Il faut rendre la locution rigoureuse.

"Pour elle" veut dire dans son référentiel.

On peut donc dire que la première loi a à faire avec les référentiels. Elle nous dit quels sont les référentiels qui partagent les mêmes lois (c'est à dire qui sont les "observateurs" qui tirent les mêmes conclusions en observant le même système)

En mécanique, la première loi donc dit:

- Tous les référentiels dans lesquels un corps bouge de manière uniforme ($\vec{v} = \text{const}$) si il n'est pas soumis à une force forment un jeu de référentiels "galiléens" (ou "inertiels") et ils sont en mouvement relatif uniforme (vitesse relative constante).

Tous ces référentiels "partagent" les mêmes lois.

Après cette discussion sur ce qui se cache derrière la première loi, il est temps pour un rappel de mécanique Newtonienne.

Rappel de mécanique Newtonienne

- Une seule particule de masse m :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) - \frac{dm}{dt}\vec{v} = \\ &= \dot{\vec{p}} - \underbrace{\dot{m}\vec{v}}_{\text{on va pas considérer des cas où la masse change dans le temps} \Rightarrow \dot{m}=0}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}}$$

$$\vec{p} = \text{impulsion} = m\vec{v}$$

En absence d'une force appliquée, $\vec{F}=0$, on a :

$$\dot{\vec{p}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const}$$

On dit que $\vec{p}$ est conservée.

On peut aussi calculer le moment cinétique $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

On calcule la variation temporelle de $\vec{L}$ sous l'action d'une force $\vec{F}$:

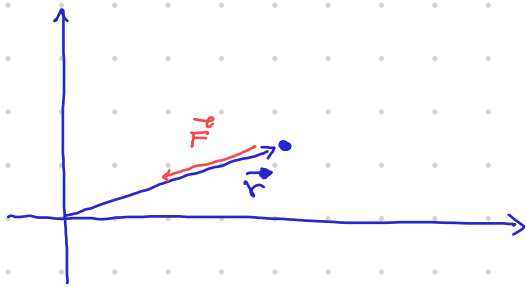
$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{p} =$$

$$= \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{p} \wedge \vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{F} + m \underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{v})}_{=0} = \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{F}}_{\text{moment de la force}}$$

Donc le moment cinétique est conservé lors que $\dot{\vec{L}} = 0$, ce qui est vrai si

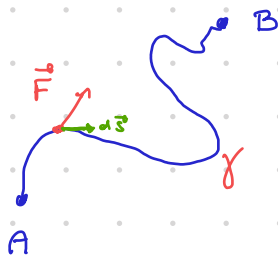
$\vec{F} = 0$ pas de force agissante sur la particule

$\vec{F} \parallel \vec{r}$ c'est le cas d'une force centrale



On insiste sur la "conservation" car ce concept va être centrale pour tout le cours.

On regarde maintenant l'énergie. Si on applique une force $\vec{F}$ lors que on déplace une particule d'un point A à un point B, au long d'une trajectoire γ , on a que le travail est



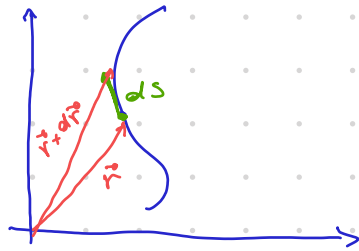
$\vec{F}$: force appliquée

$d\vec{s}$: élément infinitésimal de la trajectoire (localement tangente à la trajectoire)

$$W_{AB, \gamma} = \int_{A, \gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$d\vec{s}$ dépend de la paramétrisation. Si on choisit de paramétriser la courbe par le temps ?

On revient sur $d\vec{s}$:



on introduit la
parametrisation
temporelle

$$d\vec{s} = d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v} dt$$

Donc

$$W_{AB,\gamma} = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot \vec{v} dt =$$

$$= \int_{A,\gamma}^B \left(\frac{d}{dt} \vec{p} \right) \cdot \vec{v} dt = \int_{A,\gamma}^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt =$$

on met
la 2ème loi

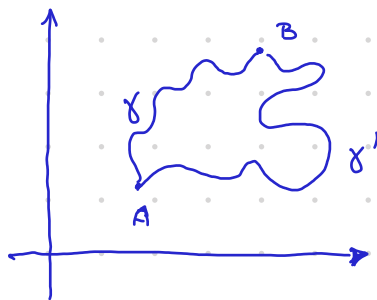
$$= \int_{A,\gamma}^B m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dt =$$

$$= \int_{A,\gamma}^B \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}}_T \right) dt = T_B - T_A$$

energie
cinétique

Donc le travail au long d'une trajectoire détermine le changement d'énergie cinétique.

Qu'est-ce que se passe si on va de A à B selon une trajectoire différente ?



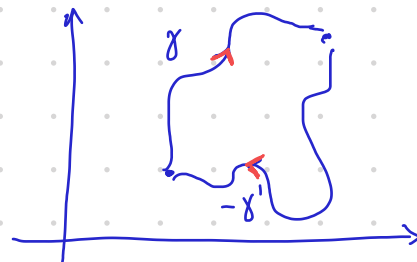
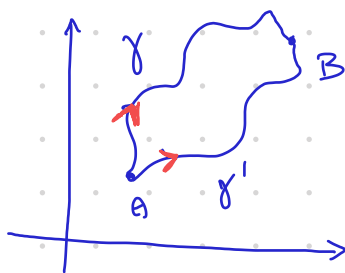
Est-ce que $W_{AB,\gamma}$ et $W_{AB,\gamma'}$ sont égales ?

Si ils ne le sont pas les mêmes, on ne peut pas dire grand-chose.

Mais s'ils sont égaux :

$$W_{AB,\gamma} = W_{AB,\gamma'} \Rightarrow \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma'}^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{A,\gamma'}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

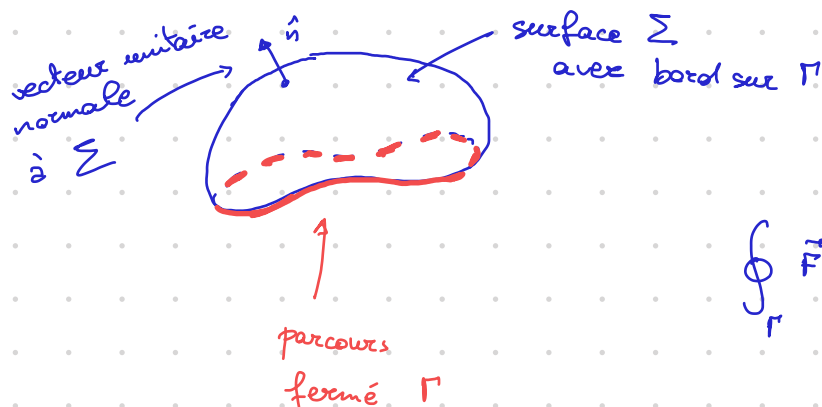


attention au changement de sens

On peut donc écrire

$$0 = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{A,\gamma'}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A,\gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{A,-\gamma'}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\underbrace{\gamma \cup (-\gamma')}_{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Où, pour un des Théorèmes de Stokes :



$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \overbrace{\text{rot } \vec{F} \cdot \hat{n}}^{\text{vecteur}} d\Sigma$$

quelque surface avec bord sur Γ

Donc on a

$$0 = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

Si cette relation est vraie pour tous Γ , et pour une surface Σ arbitraire (avec bord sur Γ), alors

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \quad \text{partout}$$

Donc $\vec{F}$ est irrotationnel.

Un champs vectoriel irrotationnel implique que le vecteur peut être écrit comme gradient d'une fonction. Dans le cas particulier qu'on est en train de regarder :

$$\vec{F} = - \vec{\nabla} V$$

$V =$ énergie potentielle

↑
attention au signe dans
la définition

Des forces avec
cette propriété sont
dites "conservatives".

Finalement on revient au travail de la force pendant le transport de A à B (qui ne dépend pas de la trajectoire si la force dérive d'un potentiel).

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (-\vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}) = - \int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s}$$

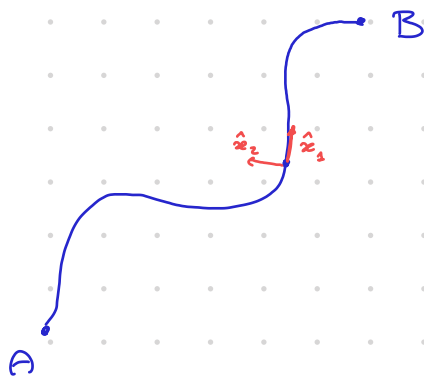
On rappelle que

$$\vec{\nabla} V = \frac{dV}{dx} \hat{x} + \frac{dV}{dy} \hat{y} + \frac{dV}{dz} \hat{z}$$

Plus en generale :

$$\vec{\nabla} V = \sum_{i=1}^d \frac{dV}{dx_i} \hat{x}_i \quad \text{en } d\text{-dimensions}$$

Mais le choix du système de coordonnées est arbitraire



On peut toujours choisir un système de coordonnées tel que un des vecteurs unitaires est localement tangente à la trajectoire et les autres sont perpendiculaires.

Dans ce cas, celui tangente est parallèle à $d\vec{s}$ et donc

$$\vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} = \left(\frac{dV}{dx_1} \hat{x}_1 + \frac{dV}{dx_2} \hat{x}_2 + \dots + \frac{dV}{dx_d} \hat{x}_d \right) \cdot d\vec{s} =$$

celui
tangente

$$= \frac{dV}{dx_1} \hat{x}_1 \cdot d\vec{s} + \sum_{i=2}^d \frac{dV}{dx_i} \underbrace{\hat{x}_i \cdot d\vec{s}}_{=0 \text{ car}}$$

sauf $\hat{x}_1$ les autres

sont perpendiculaires à la tangente

Finalement

$$\vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} = \frac{dV}{dx_1} \hat{x}_1 \cdot d\vec{s}$$

mais : $d\vec{s} = \hat{x}_1 dx_1$

et donc

$$\vec{\nabla} V = \frac{dV}{dx_1} dx_1 \quad \text{ou on appelle } x_1 \text{ la paramétrisation de la trajectoire}$$

et

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{x_A}^{x_B} \frac{dV}{dx_1} dx_1 = V_A - V_B$$

On se rappelle que

$$W_{AB} = T_B - T_A$$

et donc on a

$$T_B - T_A = V_A - V_B$$

$$\Rightarrow T_A + V_A = T_B + V_B$$

"

E_A

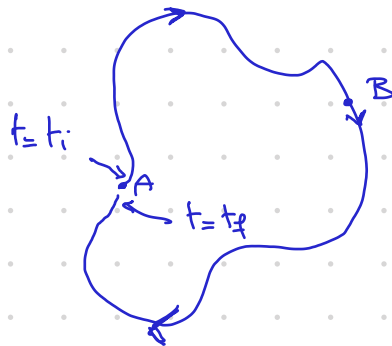
"

E_B

énergie mécanique totale

Donc, pour un système de forces conservatives, l'énergie mécanique totale est conservée

On remarque que une propriété d'un système de forces conservatives est qu'elles ne dépendent pas du temps. En effet :



Si la force pouvait changer dans le temps, alors on pourrait imaginer qu'elle ne soit pas nulle quand le système passe de A à B, mais que elle soit nulle lorsque le système revient en arrière.

Alors, $W_{AB, \gamma} \neq 0$ mais $W_{BA, -\gamma} = 0$ et donc

$$\oint_{\gamma \cup (-\gamma')} \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

Bien évidemment on peut organiser le changement temporel de façon que l'intégrale sur la boucle soit quand même nul, mais il s'agit de cas particuliers et pas générales.

Donc, une propriété importante d'une force conservative est d'être constante dans le temps.

On passe maintenant à un système à N particules en d -dimensions.

• N particules

Le jeu des positions est $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^N$, des vitesses est $\{\vec{v}_i\}$ et des impulsions est $\{\vec{p}_i\}$.

Chaque particule interagit avec les autres : $\vec{F}_{ij}$ est la force que la i -ème particule applique sur la j -ème.

Donc, pour la deuxième loi de Newton

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_j \vec{F}_{ji} + \underbrace{\vec{F}_i^{\text{ext}}}_{\text{force externe agissant sur la particule } i}$$

On somme sur toutes les particules

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\text{somme et dérivée sont opérations linéaires, donc on peut échanger l'ordre d'exécution :}} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji}}_{\text{implicitement } i \neq j, \text{ car une particule n'applique pas une force sur soi-même}} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$$\sum_i \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

On définit le centre de masse $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

ou $M = \sum_{i=1}^N m_i$ est la masse totale du système

La vitesse du centre de masse est

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

$$\Rightarrow M \dot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

$\downarrow$

$$= \vec{P} \quad \text{impulsion totale du système}$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$\hookrightarrow \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}$

Maintenant on va travailler sur $\sum_i \sum_j \vec{F}_{ji}$:

D'abord on l'écrit comme somme des ses deux moitiés

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \quad \text{identité triviale}$$

Mais lors que on somme sur les deux indices, on peut toujours échanger les indices : il revient à changer l'ordre de la somme sans en changer le résultat.

Exemple $N=3$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^3 \left(\vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \vec{F}_{i3} \right) = \left(\vec{F}_{11} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \right) + \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{22} + \vec{F}_{23} \right) + \left(\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{33} \right) =$$

$$\hookrightarrow \left(\vec{F}_{11} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \right) + \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{22} + \vec{F}_{32} \right) + \left(\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{33} \right) =$$

on redistribue la somme

$$= \sum_{i=1}^3 \left(\vec{F}_{1i} + \vec{F}_{2i} + \vec{F}_{3i} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{F}_{ji}$$

Il a été un long détour pour signaler que lors qu'on a une somme sur plusieurs double indices, on peut les échanger

Donc on reprend la somme :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij})$$

Mais on a la troisième loi de Newton qui nous dit que $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

Donc

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{F}_{ji} - \vec{F}_{ji}) = 0$$

Donc finalement on réécrit

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} + \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = 0 + \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}$$

En absence de force externes, ou si la somme des forces externes est nulle, alors

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{l'impulsion totale du système est conservée}$$

On voit alors que, par rapport au cas d'une seule particule, l'impulsion totale est conservée grâce à la troisième loi de Newton.

On porte notre attention au moment cinétique

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt} + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{p}_i$$

On somme à nouveau sur i

$$\sum_{i=1}^2 \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{L} = \sum_{i=1}^2 \underbrace{\vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\substack{\text{2ème loi} \\ \text{car } \vec{r}_i = \vec{v}_i // \vec{p}_i \\ = 0}} + \sum_{i=1}^2 \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{p}_i}_{=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \wedge \left(\sum_{j=1}^2 \vec{F}_{ji} \right) + \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \underbrace{\sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}}_{\text{moment des forces externes}}$$

On travaille sur la double somme :

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ji} =$$

$i \leftrightarrow j$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ji} \quad \downarrow \text{3ème loi}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \vec{r}_j \wedge (-\vec{F}_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} - \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ji} \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}_{ji} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \vec{r}_{ji} \wedge \vec{F}_{ji}$$

Finalement, en définissant

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i \quad \text{moment cinétique totale}$$

on a

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \wedge \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

et $\vec{L}$ est conservé si

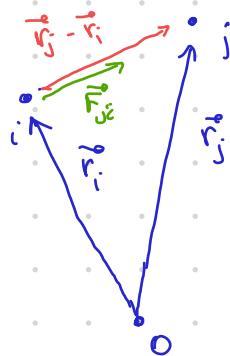
$$\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} = 0 \quad \left(\text{typiquement si } \vec{F}_i^{\text{ext}} = 0 \quad \forall i \right) \\ \text{ou centrale}$$

et si

1) Les particules n'interagissent pas ($\vec{F}_{ij} = 0 \quad \forall ij$)

ou

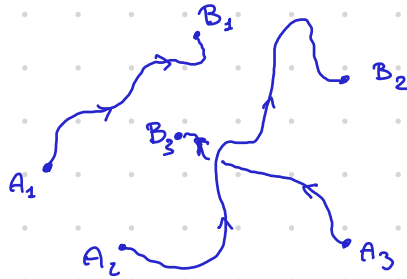
2) $\vec{F}_{ji} \parallel (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \quad \Leftarrow \text{forces centrales !!!}$



On va, par analogie à ce qu'on a fait pour une particule seule, à regarder aussi l'énergie.

On procède selon les mêmes lignes que pour une seule particule. Forces sont appliquées aux particules pour les transporter de A à B :

$$\{\vec{r}_{i,A}\} \rightarrow \{\vec{r}_{i,B}\}$$



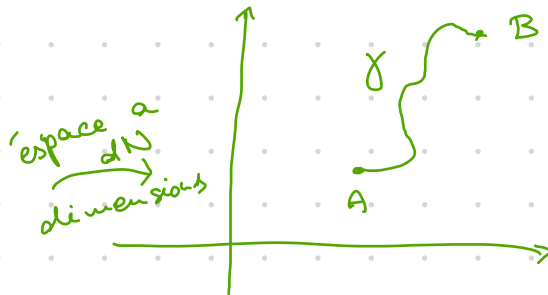
Le travail est

$$W_{AB} = \sum_i \int_{A_i \gamma_i}^B \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i$$

infinitésimale tangente à γ_i

chemin de A à B pour la i -ème particule

NOTE : même si le système est composé par N particules, on peut, mathématiquement, le voir comme un seul point dans un espace à dimension dN (donc N pour des particules en 1-dimensions, $2N$ en 2-dimensions, $3N$ en 3-dimensions, etc.) Dans le reste du cours on utilisera souvent $3N$, pour simplicité, tout en sachant qu'il s'agit d'un cas particulier.



$$\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\}$$

Alors on reprend le travail :

$$W_{AB,\gamma} = \sum_i \int_{A,\gamma_i}^B \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_{A,\gamma_i}^B \dot{\vec{p}}_i \cdot \overbrace{\vec{v}_i}^{d\vec{s}_i} dt =$$
$$= \sum_i \int_{t_{A,\gamma_i}}^{t_B} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} dt = \sum_i \left(T_{Bi} - T_{Ai} \right) = T_B - T_A$$

et on a défini l'énergie cinétique totale $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$

D'autre côté, si les forces entre les particules sont conservatives (aussi bien que les forces externes) on aura :

$$W_{AB,\gamma} = \sum_i \int_{A,\gamma_i}^B \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_{A,\gamma_i}^B \left[\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{\text{ext}} \right] \cdot d\vec{s}_i =$$
$$= \sum_i \sum_j \int_{A,\gamma_i}^B \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \sum_i \int_{A,\gamma_i}^B \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\vec{s}_i =$$
$$= \sum_i \sum_j \int_{A,\gamma_i}^B \left(- \nabla_{\vec{r}_i} V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \right) \cdot d\vec{s}_i - \sum_i \int_{A,\gamma_i}^B \nabla_{\vec{r}_i} V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_i$$

On met en évidence que le gradient doit être pris par rapport à la position de la particule sur laquelle la force est appliquée :

$\vec{F}_{ji}$: force appliquée sur i par la particule j

$\Rightarrow$ gradient par rapport à $\vec{r}_i$

Aussi, on a gardé les indices pour les potentiels V_{ij} et V_i , car chaque particule peut être soumise à des forces différentes, et de même pour chaque couple de particules : deux particules chargées interagissent par biais de l'électrostatique et de la gravitation, lorsque deux

particules neutres seulement par biais de la gravitation.

La partie associée aux forces externes est simple :

$$\begin{aligned} - \sum_i \int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_i &= - \sum_i \int_{A, \gamma_i}^B \frac{dV_i^{\text{ext}}}{ds_i} ds_i = \\ &= - \sum_i [V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_B) - V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_A)] = \sum_i V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_A) - \sum_i V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_B) = \\ &= V_{\text{tot}}^{\text{ext}}(\{\vec{r}_A\}) - V_{\text{tot}}^{\text{ext}}(\{\vec{r}_B\}) \end{aligned}$$

Où on a défini

$$V_{\text{tot}}^{\text{ext}}(\{\vec{r}_i\}) = \sum_{i=1}^N V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i)$$

La partie avec les interactions entre particules est un peu plus compliquée :

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \cdot d\vec{s}_i &= \\ = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \cdot d\vec{s}_i + \int_{A, \gamma_j}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(\vec{r}_j, \vec{r}_i) \cdot d\vec{s}_j \right] \end{aligned}$$

usuel
échange
des indices

On fait des hypothèses raisonnables :

$$1) \quad V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = V_{ji}(\vec{r}_j, \vec{r}_i)$$

c'est à dire : les deux particules interagissent par biais d'un potentiel qui ne dépende pas de l'ordre. On pense à l'interaction Coulombienne ou gravitationnelle :

$$V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad \text{electrostatique}$$

$$V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad \text{gravitationnelle}$$

2) Comme conséquence

$$V_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

En conséquence on peut travailler sur

$$\int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) d\vec{s}_i + \int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \cdot d\vec{s}_j$$

En effet :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|)$$

On peut le voir de façon plus simple en 1 dimension

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

$$\frac{d}{dx_i} f(x_i - x_j) = \frac{d(x_i - x_j)}{dx_i} \frac{df(x_i - x_j)}{d(x_i - x_j)} = 1 \cdot \frac{df(x_{ij})}{dx_{ij}}$$

$$\frac{d}{dx_j} f(x_i - x_j) = \frac{d(x_i - x_j)}{dx_j} \frac{df(x_i - x_j)}{d(x_i - x_j)} = -1 \cdot \frac{df(x_{ij})}{dx_{ij}}$$

et donc

$$\frac{d}{dx_i} f(x_i - x_j) = - \frac{d}{dx_j} f(x_i - x_j)$$

En plusieurs dimensions, avec le gradient, il est presque la même chose :

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} f(\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\}_{\alpha=1}^d) =$$

↳ α marque les composantes

$$= \sum_{\alpha=1}^d \frac{d}{dx_i^\alpha} f(\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\}) \cdot \hat{x}^\alpha = \sum_{\alpha=1}^d \frac{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{dx_i^\alpha} \frac{df(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)} \hat{x}^\alpha =$$

↑ vecteur unitaire en direction α

$$= \sum_{\alpha=1}^d \frac{d f(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)} \hat{x}^\alpha = \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} f(\vec{r}_{ij})$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}_j} f(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \sum_{\alpha=1}^d \frac{d}{dx_j^\alpha} f(\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\}) \cdot \hat{x}^\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^d \frac{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{dx_j^\alpha} \cdot \frac{d f(\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\})}{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)} \hat{x}^\alpha =$$

$$= - \sum_{\alpha=1}^d \frac{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)}{dx_i^\alpha} \frac{d f(\{x_i^\alpha - x_j^\alpha\})}{d(x_i^\alpha - x_j^\alpha)} \hat{x}^\alpha = - \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} f(\vec{r}_{ij})$$

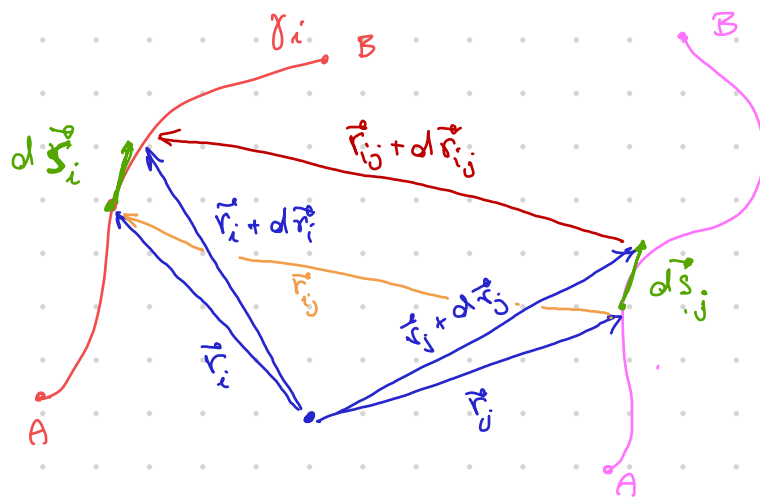
attention au signe !

Donc

$$\int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_i + \int_{A, \gamma_j}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_j =$$

$$= \int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_i - \int_{A, \gamma_j}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_j$$

On analyse les parcours γ_i et γ_j , $d\vec{s}_i$ et $d\vec{s}_j$:



Donc :

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

$$\vec{r}_{ij} + d\vec{r}_{ij} = (\vec{r}_i + d\vec{r}_i) - (\vec{r}_j + d\vec{r}_j) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j)$$

$$\Rightarrow d\vec{r}_{ij} = d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{s}_i - d\vec{s}_j$$

Et la courbe d'évolution de $\vec{r}_{ij}$ de A à B est γ_{ij}

$$\begin{aligned}
& \int_{A, \gamma_i}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_i - \int_{A, \gamma_j}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{s}_j = \\
& = \int_{A, \gamma_{ij}}^B \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) \cdot d\vec{r}_{ij} = \int_{A, \gamma_{ij}}^B \frac{dV_{ij}}{ds_{ij}} ds_{ij} = \\
& = V_{ij}(\vec{r}_{ij,B}) - V_{ij}(\vec{r}_{ij,A})
\end{aligned}$$

Si on met tous ensemble

$$\begin{aligned}
W_{AB, \gamma} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [V_{ij}(\vec{r}_{ij,A}) - V_{ij}(\vec{r}_{ij,B})] + \\
&\quad + \sum_i [V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_{i,A}) - V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_{i,B})] = \\
&= V_{\text{tot}}(\{\vec{r}_{i,A}\}) - V_{\text{tot}}(\{\vec{r}_{i,B}\})
\end{aligned}$$

ici attention
au changement
de signe

Où on a défini

$$V_{\text{tot}}(\{\vec{r}_i\}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_{ij}(\vec{r}_{ij}) + \sum_i V_i^{\text{ext}}(\vec{r}_i)$$



$\frac{1}{2}$ car on ne veut pas compter V_{ij} deux fois, une par i et une par j

Aussi à remarquer que si les forces sont conservatives, le travail ne dépende pas du parcours γ

Finalement, aussi dans ce cas à N particules, on a

$$T_A + V_{\text{tot},A} = T_B + V_{\text{tot},B}$$

On s'arrête un moment pour discuter tous ces résultats :

- 1) L'impulsion totale d'un système de N particules est conservée si la troisième loi de Newton est valable (bien sûr qu'elle l'est !)
- 2) Le moment cinétique totale est conservé si les forces entre les particules sont centrales (dirigées selon $\vec{r}_{ij}$)
- 3) L'énergie mécanique totale est conservée si les forces viennent d'un potentiel de la forme $V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|)$.

Alors on a remarqué que :

$$1) -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(\vec{r}_{ij}) = +\vec{\nabla}_{\vec{r}_j} V_{ij}(\vec{r}_{ij})$$

$$\downarrow$$

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \Rightarrow \text{troisième loi !!!}$$

- 2) Si V_{ij} dépend de $|\vec{r}_{ij}| = r_{ij}$ alors on peut développer un peu plus le gradient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|) &= \vec{\nabla}_{\vec{r}_{ij}} V_{ij}(|\vec{r}_{ij}|) = \sum_{\alpha=1}^d \hat{x}^\alpha \frac{d|\vec{r}_{ij}|}{dx_{ij}^\alpha} \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} = \\ &= \underbrace{\frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}}}_{\text{ne dépend pas de } \alpha} \cdot \sum_{\alpha=1}^d \hat{x}^\alpha \frac{d}{dx_{ij}^\alpha} \sqrt{\sum_{\beta=1}^d (x_{ij}^\beta)^2} = \\ &= \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} \sum_{\alpha=1}^d \hat{x}^\alpha \frac{x_{ij}^\alpha}{\sqrt{\sum_{\beta=1}^d (x_{ij}^\beta)^2}} = \frac{\sum_{\alpha=1}^d x_{ij}^\alpha \hat{x}^\alpha}{r_{ij}} \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} = \\ &= \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} = \hat{r}_{ij} \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} \end{aligned}$$

mais donc il est dirigé selon $\vec{r}_{ij}$!!!

Donc, la forme du potentiel $V(|\vec{r}_{ij}|)$ automatiquement mène à la conservation simultanée de l'impulsion totale (et elle mène à la 3ème loi!), à la conservation du moment cinétique totale et à la conservation de l'énergie mécanique totale.

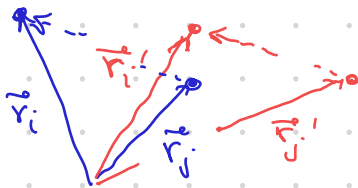
Donc on analyse un peu mieux cette structure

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

- 1) Dépende seulement de la différence entre $\vec{r}_i$ et $\vec{r}_j$: il est "invariant par translation" (une symétrie!) = si on ajoute un vecteur $\vec{a}$ à $\vec{r}_i$ et $\vec{r}_j$ on a

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{a}$$

$$\vec{r}_j' = \vec{r}_j + \vec{a}$$



$$\vec{r}_i' - \vec{r}_j' = \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

cette partie donne la troisième loi de Newton et la conservation de l'impulsion totale

- 2) $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ ne dépend pas de l'orientation, donc est "invariant par rotation" (une symétrie!). et cette structure est responsable de la conservation du moment cinétique totale

Donc on peut aussi se poser la question
si les symétries jouent un rôle plus profond que
ce que superficiellement on est en train de toucher.
On va le rediscuter prochainement.

